

## Varianta 67

### SUBIECTUL I

- a)  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- b)  $a = 1$ .
- c)  $d(M, NP) = 4$ .
- d) Punctul  $T$  este mijlocul segmentului  $(NP) \Rightarrow T(2, 2)$ .
- e) mediana din  $M$  este  $MT = 2$ .
- f)  $b = 4$ .

### SUBIECTUL II

1.

- a)  $10 + 11 + \dots + 30 = 420$ .
- b) Numărul elementelor mulțimii  $A$  este 21.
- c)  $p = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ .
- d) În mulțime sunt 5 numere divizibile cu 5.
- e)  $C_{10}^3 = 120$ .

2.

- a)  $f'(x) = \frac{1}{x} + x$ .
- b) Deoarece  $f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- c)  $f'(x) \geq 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2, (A) \forall x > 0$ .
- d)  $\int_1^e \left( f(x) - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

### SUBIECTUL III

- a)  $\det(A) = a^2 + 3b^2 = 1$ .
- b) Fie  $A, B \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}$ , unde  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  și  
 $\det(A) = \det(B) = 1$ . Atunci  $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - 3bd & ad + bc \\ -3bc - 3ad & -3bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -3\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ,

unde  $\alpha = ac - 3bd$ ,  $\beta = ad + bc$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , iar  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1$   
 $\Rightarrow A \cdot B \in G'$ .

c)  $A^{-t}A = \begin{pmatrix} 0 & 4b \\ -4b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^{-t}A) = 4b^2 \geq 0$ .

d)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \in G' \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \in G' \Leftrightarrow b = -3(-3b)$  și  
 $a^2 + 3b^2 = 1 \Rightarrow a = 1, b = 0$ .

e)  $P^4 = I_2$ .

f) Dacă  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A + {}^tA = 2 \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .  $(A + {}^tA)^2 = 4I_2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 4 \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = 4I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$ , de unde obținem matricele:  
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

g) Din c)  $\Rightarrow A^{-t}A = \begin{pmatrix} 0 & 4b \\ -4b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-t}A)^2 = -16b^2 I_2$   
 $\Rightarrow (A^{-t}A)^4 = 2^8 b^4 I_2 \Rightarrow (A^{-t}A)^{4n} = 2^{8n} b^{4n} I_2$ .

#### SUBIECTUL IV

a)  $f(2) = 23$ .

b)  $f'(x) = 3x^2 + 3^x \ln 3 + 3$ .

c)  $\int_1^2 f(x) dx = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{33}{4} + \frac{6}{\ln 3}$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3 - 3x}{g(x) - x^e - ex} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{e^x} = \infty$ .

e) Fie  $P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

$$P(1): 1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} (A).$$

Presupunem  $P(k) (A)$  și demonstrăm  $P(k+1) (A)$ , unde  $k \geq 1$ .

$$P(k): 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}, \text{ iar}$$

$$P(k+1): 1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \text{ Dar}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 \stackrel{P(k)}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

De unde  $P(n)$  este (A)  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

**f)** Pentru  $x \geq 1$  avem:  $x^3 \geq x^e$ ,  $3^x \geq e^x$  și  $3x \geq ex \Rightarrow$  adunând aceste inegalități  
 $f(x) \geq g(x), \forall x \geq 1$

**g)**  $h(x) = x^e + e^x \leq x^3 + 3^x, \forall x \geq 1$ , de unde

$$h(1) + h(2) + \dots + h(n) \leq 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3(3^n - 1)}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$